Simulering av Overgangsrater i Livsforsikring Basert på Ikke-Lineær Filtreringsteori

Knut Aasen

February 14, 2017

Oppgaven

Kort om oppgaven

Ønsker å simulere overgangsrater, med teknikker fra stokastisk filtreringsteori, i livsforsikring.

- Stokastisk og kontinuerlig i tid.
- Tenkt å kunne brukes for ulike overgangsrater (f.eks. uføre, dødelighet).
- Fleksibel.

Stokastisk filtreringsteori

En introduksjon

Vi ønsker å estimere en prosess som vi ikke klarer å observere direkte, basert på inndirekte observasjoner.

Signalprosessen og observasjonsprosessen

Signalprosessesen $X = (X(t); t \geq 0)$ Prosessen vi ønsker å estimere.

Observasjonsprosessen $Y = (Y(t); t \geq 0)$ Prosessen vi observerer.

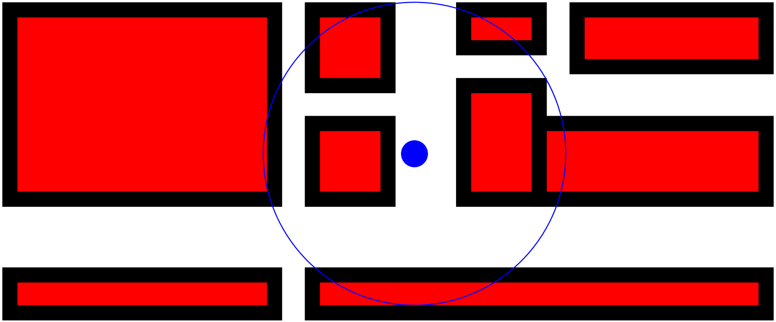
$\mathcal{F}_t^Y$ Informasjonen samlet av Y opp til et tidspunkt t.

Stokastisk filtreringsteori

Eksempel. Fortapt hund, med GPS-halsbånd, i by.

Vi ønsker hundens egentlige posisjon ved tiden t, $X(t) \in \mathbb{R}^2$. Vi observerer $Y(t) \in \mathbb{R}^2$. La oss anta at Y følger dynamikken

$$\mathrm{d}Y(t) = \alpha X(t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t; \quad t \geq 0.$$



Det beste estimatet $\widehat{X}(t)$

Det optimale filteret

Problem: Finne et beste estimat $\widehat{X}(t)$ for $X(t)$, basert på $\mathcal{F}_t^Y$; $t \geq 0$.

$\mathcal{F}_t^Y$ — All informasjon samlet av Y over tidsintervallet $[0, t]$.

Løsning: Gitt ved

$$\widehat{X}(t) = \mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_t^Y]; \quad t \geq 0.$$

Kallianpur-Striebel formelen

Anta at $X(t) = (X_1(t), \ldots, X_d(t))' \in \mathbb{R}^d$; $t \geq 0$. Vi finner det beste estimatet $\widehat{X}(t)$, for $X(t)$, ved å bruke Kallianpur-Striebel formelen:

$$\widehat{X}_j(t) = \mathbb{E}[X_j(t)|\mathcal{F}_t^Y] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z(t)X_j(t)|\mathcal{F}_t^Y]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z(t)|\mathcal{F}_t^Y]}; \quad t \geq 0,\ j = 1, \ldots, d.$$

Mortalitetsraten $\mu(t,x)$; $t,x \geq 0$.

Vår mortalitetsrate

La $\mu(t,x)$, ved tiden $t \geq 0$, for alder $x \geq 0$, være gitt ved

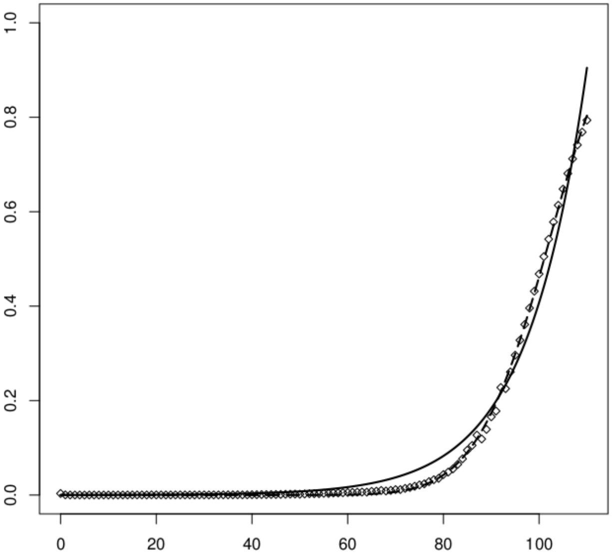
$$\mu(t,x) = Y_1(t) + \exp\{\beta + Y_2(t) + Y_3(t)x\},$$

hvor

- $\beta \in \mathbb{R}$ er en konstant;
- $(Y(t); t \geq 0) = ((Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t))'; t \geq 0)$, er observasjonsprosessen.

I tillegg setter vi betingelsen,

$$Y_1(t) \geq 0\,; \quad t \geq 0.$$



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
20
40
60
80
100

Vår modell

Modellen

Observasjonsprosessen $Y = (Y(t); t \geq 0)$ er gitt ved

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{1}}(\lambda(t,\omega))} \zeta_j\,; \quad t \geq 0.$$

Signalprosessen $X(t) \in \mathbb{R}^3;\ t \geq 0$, har Vasicek dynamikken,

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_1(t) = X_3(s)\{X_2(s) - X_1(s)\}\mathrm{d}s + \mathrm{d}B(t), \\ \mathrm{d}X_2(t) = 0, \\ \mathrm{d}X_3(t) = 0, \end{cases}$$

hvor $X(0)$ er en stokastisk variabel og $B = (B(t); t \geq 0)$ er en Brownsk bevegelse.

Vår modell

Observasjonsprosessen

Observasjonsprosessen $Y = (Y(t); t \geq 0)$ er gitt ved

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{1}}(\lambda(t,\omega))} \zeta_j \, ; \quad t \geq 0,$$

hvor

- $(N_1(t); t \geq 0)$ er en Poisson process med intensitet lik 1;
- $(\zeta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ er i.i.d.;
- $(\lambda(t,\omega); t \geq 0)$ er gitt ved,

$$\lambda(t,\omega) = \varepsilon \int_0^t \{|X_1(s)| + |X_2(s)| + |X_3(s)|\} \mathrm{d}s; \quad t \geq 0.$$

Estimering av overgangsrater

Idé

$\boxed{\mathcal{F}_T^Y} \longrightarrow \boxed{\widehat{X}_2(T),\ \widehat{X}_3(T)} \longrightarrow \boxed{X(t); 0 \leq t \leq T^*} \longrightarrow \boxed{Y(t); 0 \leq t \leq T^*}$

Tidsintervallene

$[0, T]$ — Tidsintervallet vi har data for.

$[0, T^*]$ — Tidsintervallet vi ønsker å estimere overgangsrater for.

Stegene

Steg 1. Hente informasjon fra data.

Steg 2. Finne beste estimat for Vasicek paramterene $\widehat{X}_2(T), \widehat{X}_3(t)$.

Steg 3. Simulere fremtidige stier av observasjonsprosessen, Y.

Steg 4. Skaffe endelige mortalitetsrater.

Beste estimat $\widehat{X}_2(T)$, $\widehat{X}_3(T)$

Beste estimat ved Monte Carlo

Vi ønsker å bruke Kallianpur-Striebel formelen for å

$$\widehat{X}_j(T) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z(T)X_j(T)|\mathcal{F}_T^Y]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z(T)|\mathcal{F}_T^Y]}; \quad j = 2, 3,$$

hvor

$$Z(T) = \exp\left\{ \sum_{0 \le s \le T} \ln\{\varepsilon(|X_1(s)| + |X_2(s)| + |X_3(s)|)\} \mathbf{1}_{\{\Delta Y(s) \neq 0\}} + \int_0^T \{1 - \varepsilon(|X_1(s)| + |X_2(s)| + |X_3(s)|)\} \mathrm{d}s \right\}.$$

Monte Carlo: $\begin{cases} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z(T)X_j(T)|\mathcal{F}_T^Y] \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j(T)X_{j,i}(T), \quad i = 2, 3, \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Z(T)|\mathcal{F}_T^Y] \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j(T). \end{cases}$

Spørsmål: *Når har vi $\Delta Y(s) \neq 0$?*

Hopp

Definisjonen av et hopp.

[a] Først definerer vi snittet av bevegelsen fra år til år som,

$$\bar{\Delta} Y := \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \|\Delta Y(j)\|,$$

hvor

$$\Delta Y(j) := Y(j+1) - Y(j), \quad j = 0, 1, \ldots, T-1.$$

Vi sier at et hopp skjer, dersom

$$\|\Delta Y(j)\| > \bar{\Delta} Y + \delta, \quad j = 0, 1, \ldots, T-1,$$

hvor $\delta > 0$ er en konstant.

[a] **HUSK.** $\mu(t, x) = Y_1(t) + \exp\{\beta + Y_2(t) + Y_3(t)x\}$

Nå har vi.

Nå har vi funnet de beste estimatene:

$$\widehat{X}_2(T) \quad \text{og} \quad \widehat{X}_3(T).$$

Følgelig kan vi simulere fremtidige stier av X over $[0, T^*]$, ved å diskretisere

$$\mathrm{d}X_1(t) = \widehat{X}_3(T)\{\widehat{X}_2(T) - X_1(t)\}\mathrm{d}t + \mathrm{d}B(t); \quad 0 \le t \le T^*.$$

Rekursjon.

Vi velger en ekvidistant partisjonering av $[0, T^*]$,

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T^*, \quad \text{hvor } t_j := jT^*/n;\ j = 0, 1, \ldots, n.$$

I tillegg definerer vi $\Delta t := T^*/n$. Nå har vi rekursjonen

$$X_1(t_{j+1}) = X_1(t_j) + \widehat{X}_3(T)(\widehat{X}_2(T) - X_1(t_j))\Delta t + \xi\sqrt{\Delta t},$$

for $j = 0, \ldots, n-1$, hvor $\xi \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

Overgangsrater over $[0, T^*]$

Fremtidige stier av observasjonsprosessen

Med fremtidige stier av signalprosessen, X, kan vi nå simulere Y over $[0, T^*]$, ved først å simulere fremtidige stier av "hoppeintensiteten":

$$\lambda(t_{j+1}) = \lambda(t_j) + \varepsilon \int_{t_j}^{t_{j+1}} \{|X_1(s)| + |X_2(s)| + |X_3(s)|\} \mathrm{d}s$$

for $j = 0, 1, \dots, n-1$. Følgelig har vi

$$Y(t_{j+1}) = Y(t_j) + \sum_{k=1}^{N_1(\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j))} \zeta_{j,k}; \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

hvor $\zeta_{j,k}$ er hoppestørrelsene.

Overgangsrater over $[0, T^*]$

Fremtidige overgangsrater

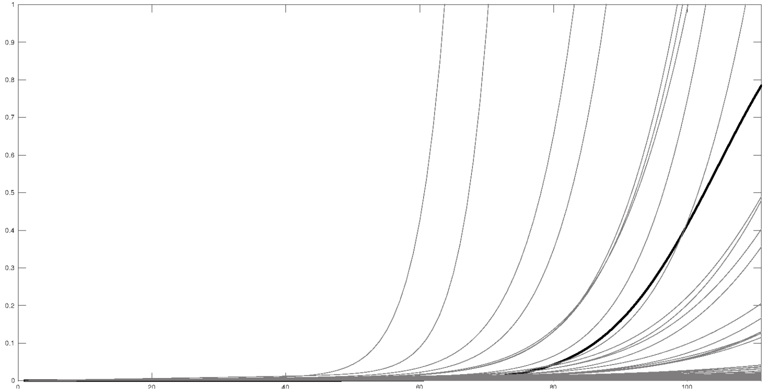
For alle $x \geq 0$ har vi nå

$$\mu(t_j, x) = Y_1(t_j) + \exp\{\beta + Y_2(t_j) + Y_3(t_j)x\}; \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Et eksempel. Overgangsraten $\mu(26, x)$.

Her er overgangsraten gitt ved

$$\mu(t,x) = Y_1(t) + Y_2(t)x + \exp\{\beta + Y_3(t) + Y_4(t)x + Y_5(t)x^2\}; \; t, x \geq 0.$$



Mer generelt

Observasjonsprosessen

Nå har vi, opp til nå, hatt følgende,

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{1}}(\lambda(t,\omega))} \zeta_j; \quad t \geq 0.$$

Mer generelt kan vi ta for oss

$$Y(t) = \int_0^t f(s, X(s))\mathrm{d}s + B(t) + \sum_{j=1}^{N_{\mathbf{1}}(\lambda(t,\omega))} \zeta_j; \quad t \geq 0.$$